

2.4 : Ρίζες πραγματικών αριθμών



1. i) Αν $a = \sqrt{3} - \sqrt{2}$, $\beta = \sqrt{3} + \sqrt{2}$ να βρεθεί η αριθμητική τιμή της παράστασης: $a^2 - 3a\beta + \beta^2$.

ii) Αν $a = \sqrt{5} - \sqrt{3}$, $\beta = \sqrt{5} + \sqrt{3}$ >> >> >> >> : $a^2 - \beta^2 + a\beta$.

2. Να απλοποιήσετε την παράσταση: $\sqrt{41 - \sqrt{29 - \sqrt{19 - \sqrt{9}}}}$.

3. Η παράσταση $\frac{\sqrt{x^2}}{x}$ είναι ίση με -1 όταν:

- A. $x=0$ B. $x>0$ Γ. $x<0$ Δ. $x\leq 0$ Ε. $x\geq 0$

4. Για ποιά $x \in \mathbb{R}$ η παράσταση: $A(x) = \frac{x-1 + \sqrt{(3x-1)^2}}{2x}$ είναι σταθερή :

5. Δείξτε ότι ο αριθμός $\alpha = \sqrt{\frac{1}{(\sqrt{3}-2)^2}} + \sqrt{\frac{1}{(\sqrt{3}+2)^2}}$ είναι ακέραιος .

6. Ομοίως ο $\beta = \sqrt{\frac{1}{(\sqrt{15}-4)^2}} + \sqrt{\frac{1}{(\sqrt{15}+4)^2}}$ είναι ακέραιος .



7. Να αποδείξετε ότι: $(1-\sqrt{2})^{-3} + (1+\sqrt{2})^{-3} = -14$

8. Να υπολογιστούν οι παραστάσεις : i) $(\sqrt{16} - 3\sqrt{5} + \sqrt{20} - \sqrt{9}) \cdot (1 + \sqrt{5})$ (= -4)

ii) $\sqrt{3} \cdot \sqrt{3} - \sqrt{6} \cdot \sqrt{3} + \sqrt{6}$ iii) $(\sqrt{18} - 4\sqrt{2} + 3\sqrt{4} - \sqrt{50}) \cdot (1 + \sqrt{2})$

iv) $(\sqrt{75} + \sqrt[3]{64} - \sqrt{12} - \sqrt{3}) \cdot (\sqrt{3} - 2)$ v) $(2\sqrt{32} + 3\sqrt{48} - 9\sqrt{3} + 3) \div \sqrt{27}$.

9. Να γραφτούν πιο απλά οι παραστάσεις : i) $\sqrt[4]{\sqrt[3]{3\sqrt{3}}}$ ii) $\sqrt{2\sqrt[3]{3\sqrt{4}}}$ iii) $\sqrt[4]{16\alpha^4\beta^8}$

iv) $\sqrt{3\sqrt[4]{3\sqrt{3}}}$

v) $\sqrt[3]{\sqrt{\alpha^4\sqrt{\beta^2}}}$

vi) $\frac{2\sqrt[3]{\alpha}}{\sqrt[6]{2\alpha^2}}$

10. Αν $\alpha, \beta > 0$ να βρεθεί το εξαγόμενο : $\sqrt[4]{\alpha} \cdot \sqrt{\alpha^4\beta} \cdot \sqrt[12]{\alpha\beta^{10}}$.

11. Να μετατραπούν σε ισοδύναμα με ρητό παρονομαστή τα κλάσματα : i) $\frac{8}{\sqrt[3]{16}}$

ii) $\frac{1}{\sqrt[3]{2}\sqrt{3}}$

iii) $\frac{4}{\sqrt{7} + \sqrt{3}}$

iv) $\frac{8}{\sqrt{5} + \sqrt{3} - \sqrt{2}}$

v) $\frac{1}{1 - \sqrt[3]{2}}$

$$\text{vi) } \frac{x}{\sqrt[5]{x^2}} \qquad \text{vii) } \frac{x - \sqrt{x^2 + 1}}{x + \sqrt{x^2 + 1}}$$

12. Αν $x = \sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{3}}}$, $y = \sqrt{2 - \sqrt{2 + \sqrt{3}}}$, $z = \sqrt{2 + \sqrt{3}}$ να δείξετε ότι : $xyz = 1$.

13. Αν $\alpha = \sqrt{2}$, $\beta = \sqrt{2 + \sqrt{2}}$, $\gamma = \sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{2}}}$, $\delta = \sqrt{2 - \sqrt{2 + \sqrt{2}}}$ να δείξετε ότι: $\alpha\beta\gamma\delta = 2$.

14. Να υπολογίσετε τη διαφορά : i) $A = \sqrt{4 + 2\sqrt{3}} - \sqrt{4 - 2\sqrt{3}}$ ii) $B = \sqrt{13 - 4\sqrt{3}} - 2\sqrt{3}$

15. Να υπολογιστούν οι παραστάσεις : i) $A = \sqrt{\frac{9}{(1 - \sqrt{3})^2}} - \sqrt{\frac{9}{(1 + \sqrt{3})^2}}$

ii) $B = \sqrt{4 + 2\sqrt{3}} + \sqrt{3 - 2\sqrt{2}} + \sqrt{5 - 2\sqrt{6}} + \sqrt{19 + 2\sqrt{48}}$

16. Να βρείτε πότε ορίζονται οι παραστάσεις : i) $A = \sqrt{9 - 6x + x^2} - \sqrt[3]{x + 4}$

ii) $B = \sqrt{4 - |3 - x|}$ iii) $\Gamma = \sqrt{|x + 5| - 4}$

17. Αν $-1 < x < 2$ να απλοποιηθεί η παράσταση : $A = 5\sqrt{(x - 2)^2} - 3\sqrt{(x + 3)^2} + \sqrt{x^2 + 4x + 4}$

18. Να βρεθούν τα γινόμενα : i) $\sqrt[15]{x^2} \cdot \sqrt[5]{x^4}$ ii) $\sqrt[12]{x^7} \cdot \sqrt[20]{x^3} \cdot \sqrt[15]{x^2}$ iii) $\sqrt{2} \cdot \sqrt[3]{3} \cdot \sqrt[5]{\frac{1}{6}}$

19. Να αποδείξετε ότι για θετικούς α , β ισχύει η ανισότητα : $\sqrt{\frac{\alpha^2}{\beta}} + \sqrt{\frac{\beta^2}{\alpha}} \geq \sqrt{\alpha} + \sqrt{\beta}$

20. Αν $\alpha^2 + \beta^2 = 1$ (1) να αποδείξετε ότι : $\sqrt{\alpha^4 + 4\beta^2} + \sqrt{\beta^4 + 4\alpha^2} = 3$.

21. Δίνεται η παράσταση: $\Pi = \left(\sqrt[6]{2^3 + 4}\right) \cdot \left(\sqrt[6]{2^3 - 4}\right)$

α) Να υπολογίσετε την παράσταση με χρήση υπολογιστή τσέπης.

β) Να υπολογίσετε την παράσταση χρησιμοποιώντας αλγεβρικές ιδιότητες.

γ) Συγκρίνετε τις δύο μεθόδους ως προς την ακρίβεια του αποτελέσματος.

