ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2^{ο}: ΠΟΛΥΩΝΥΜΑ - ΠΟΛΥΩΝΥΜΙΚΕΣ ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ

2.2. *ΔΙΑΙΡΕΣΗ ΠΟΛΥΩΝΥΜΩΝ*

1. ΠΡΟΤΑΣΗ: *Για κάθε ζεύγος πολυωνύμων $\Delta(x)$ και $\delta(x)$ με $\delta(x)\neq 0$ υπάρχουν δυο μοναδικά πολυώνυμα $\pi(x)$ και $\upsilon(x)$, τέτοια ώστε:*

$$\Delta(x) = \delta(x)\cdot\pi(x) + \upsilon(x)\ ,$$

Όπου το $\upsilon(x)$ ή είναι το μηδενικό πολυώνυμο ή έχει βαθμό μικρότερο από το βαθμό του $\delta(x)$.

2. ΠΡΟΤΑΣΗ: *Το υπόλοιπο της διαίρεσης ενός πολυωνύμου $P(x)$ με το $x-\rho$ είναι ίσο με την τιμή του πολυωνύμου για $x=\rho$.*
Είναι δηλαδή $\upsilon = P(\rho)$.

3. ΠΡΟΤΑΣΗ: *Ένα πολυώνυμο $P(x)$ έχει παράγοντα το $x-\rho$ αν και μόνο αν το ρ είναι ρίζα του $P(x)$, δηλαδή αν και μόνο αν $P(\rho)=0$.*

ΛΥΜΕΝΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1. Να βρεθούν οι πραγματικοί αριθμοί α, β ώστε το πολυώνυμο $P(x) = x^3 + \alpha x + \beta$ να διαιρείται από το $(x-1)^2$.

Λύση:

Εκτελούμε τη διαίρεση $P(x):[(x-1)^2 = x^2-2x+1]$

$$\begin{array}{rrrrr|l}
P(x) = & x^3 & +\ 0x^2 & +\ \alpha x & +\ \beta & x^2-2x+1 \\ \cline{6-6}
 & -x^3 & +\ 2x^2 & -\ x & & x+2 \\ \cline{2-5}
 & & 2x^2 & +\ (\alpha-1)x & +\ \beta & \\
 & & -2x^2 & +\ 4x & -\ 2 & \\ \cline{3-5}
 & & & (\alpha+3)x & +\ \beta-2 &
\end{array}$$

Το υπόλοιπο της διαίρεσης είναι:
$\upsilon(x) = (\alpha+3)x + \beta - 2$

Το $P(x)$ διαιρείται από το $(x-1)^2$ αν και μόνο αν $\upsilon(x) = 0 \Leftrightarrow (\alpha+3)x + \beta - 2 = 0$
$\Leftrightarrow \alpha+3 = 0$ και $\beta-2 = 0$
$\Leftrightarrow \alpha = -3$ και $\beta = 2$.

2ος τρόπος:

Το $P(x)$ διαιρείται από το $(x-1)^2$ αν και μόνο $P(1)=0$ και $\pi(1)=0$, όπου $\pi(x)$ είναι το πηλίκο της διαίρεσης $P(x):(x-1)$.............

Ασκήσεις

12. Να γίνουν οι διαιρέσεις:

α) $(2x^5 - x^3 + 2x^2 - 9) : (x^2 - 1)$ β) $(x^4 - 7x^3 + 2x - 15) : (x^3 + 5)$

γ) $(3x^3 - 4ax + a^2) : (x - 2a)$ δ) $[7x^3 - (9a + 7a^2)x + 9a^2] : (x - a)$

13. Να βρείτε το πολυώνυμο $f(x)$ το οποίο όταν διαιρεθεί με το $x^2 + 1$, δίνει πηλίκο $3x - 1$ και υπόλοιπο $2x + 5$.

14. Να προσδιορίσετε τους πραγματικούς αριθμούς κ, λ ώστε αν το πολυώνυμο $P(x) = x^4 + 1$ διαιρεθεί με το πολυώνυμο $x^2 + κx + λ$ να αφήνει υπόλοιπο 0.

15. Αν το πολυώνυμο $f(x) = x^3 + αx^2 + βx + 4$ διαιρείται ακριβώς με το $x - 2$ και εάν επιπλέον $f(1) = 8$, να προσδιοριστούν τα α, β.

16. Δίνεται το πολυώνυμο $P(x) = 2x^3 + αx^2 - 13x + β$. Αν το $P(x)$ διαιρείται με το $x^2 - x - 6$, να προσδιορίσετε τα $α, β \in R$.

17. Δίνεται το πολυώνυμο $P(x) = λ^2x^2 + 2(λ^2 - 3λ + 1)x - 3(4λ + 1)$. Δείξτε ότι το υπόλοιπο της διαίρεσης $P(x) : (x + 2)$ είναι ανεξάρτητο του λ.

18. Να αποδείξετε ότι αν το πολυώνυμο $P(x)$ έχει παράγοντα το $x - 5$, τότε το πολυώνυμο $P(2x - 3)$ έχει παράγοντα το $x - 4$.

19. Με τη βοήθεια του σχήματος Horner να βρείτε τα πηλίκα και τα υπόλοιπα των διαιρέσεων: α) $(x^3 - 2x^2 + 5x - 6) : (x - 2)$ β) $(2x^5 - x^4 + 6x^2 + 3) : (x + 1)$

γ) $[6x^3 - (2a + 6a^2)x + 3a^2] : (x - a)$, $a \in R$ δ) $(x^6 - 4x^5 + x^2 - 2) : (2x - 1)$

ε) $(x^5 - \frac{1}{λ^2}x^3 + λx^2 - 2) : (λx + 1)$, $λ \in R^*$

20. Να προσδιοριστούν οι πραγματικοί αριθμοί κ, λ ώστε το πολυώνυμο $P(x)=x^3-κx^2+(λ-1)x+5$ να έχει για παράγοντα το $(x - 1)(x + 2)$.

21. Να προσδιοριστούν οι πραγματικοί αριθμοί α, β ώστε το πολυώνυμο $P(x) = x^3 - x^2 - (3 + α)x + β + 10$ να έχει για παράγοντα το $(x - 2)^2$.

22. Το πολυώνυμο $P(x)$ διαιρούμενο με $x - 2$ αφήνει υπόλοιπο 10 και διαιρούμενο με $x + 3$ αφήνει υπόλοιπο 5. Να βρεθεί το υπόλοιπο της διαίρεσης του $P(x)$ με το $(x - 2)(x + 3)$.

23. Έστω $P(x)$ πολυώνυμο με $P(0) = 2$, $P(1) = 1$, $P(-2) = 10$. Να βρεθεί το υπόλοιπο της διαίρεσης του $P(x)$ με το $x^3 + x^2 - 2x$.

24. Το πολυώνυμο $P(x)$ διαιρούμενο με $x + 2$ αφήνει υπόλοιπο 3 και διαιρούμενο με $x^2 - 4x + 3$ αφήνει υπόλοιπο $2x + 7$. Να βρεθεί το υπόλοιπο της διαίρεσης: $P(x) : (x + 2)(x^2 - 4x + 3)$.